

Плещинский Илья Николаевич

Переопределенные граничные задачи
и задачи сопряжения
для уравнения Гельмгольца
и системы уравнений Максвелла

01.01.02 – дифференциальные уравнения

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2007

Работа выполнена в государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования "Казанский государственный университет им. В.И. Ульянова-Ленина"

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор
Плещинский Николай Борисович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор
Ильинский Анатолий Серафимович
доктор физико-математических наук,
профессор
Обносов Юрий Викторович

Ведущая организация: Пензенский государственный
университет

Защита состоится 23 мая 2007 г. в 16 час. на заседании диссертационного совета К 212.081.06 в Казанском государственном университете по адресу: 420008, г.Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37, НИИММ, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан 6 апреля 2007 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета канд. физ.-мат. наук, доцент

Е.К. Липачёв

Общая характеристика работы

В диссертации исследованы граничные задачи и задачи сопряжения для уравнения Гельмгольца и системы уравнений Максвелла, которые используются при описании процессов распространения и дифракции электромагнитных волн в волноводных структурах.

Цель работы

Основная цель работы — распространить метод переопределенной граничной задачи на новые классы граничных задач для уравнений волноводной электродинамики: задачи сопряжения полей с криволинейными границами раздела сред; трехмерные задачи для цилиндрических волноводов произвольного сечения с металлическими стенками и задачи о стыке открытых диэлектрических волноводов.

Актуальность темы

К задачам сопряжения решений для уравнения Гельмгольца и системы уравнений Максвелла приводится широкий класс задач теории распространения и дифракции электромагнитных волн. Исследованию граничных задач для уравнений с частными производными, описывающих процессы, протекающие в различных волноводных структурах, посвящено много публикаций.

Наиболее полно изучены задачи дифракции волн на неоднородностях в плоском волноводе с металлическими стенками. В частности, достаточно подробно исследована задача дифракции электромагнитной волны на диафрагмах¹.

¹Шестоपालов В.П. Метод задачи Римана-Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. — Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1971.

Граничные задачи для системы уравнений Максвелла в цилиндрических областях являются существенно более сложными, так как в этом случае система не распадается на независимые подсистемы. В то же время хорошо известно, что любое поле в волноводе с металлическими стенками можно представить в виде суммы полей ТЕ- и ТМ-поляризации².

Исследование математических моделей диэлектрических волноводов³ также представляет большой интерес с практической точки зрения. Соответствующие дифференциальные операторы имеют не только дискретный, но и непрерывный спектр. При исследовании открытых и полукрытых структур часто учитываются только собственные волны дискретного спектра, а влияние мод непрерывного спектра, в том числе на энергетические характеристики поля, изучено недостаточно.

Методы исследования

При исследовании задач дифракции электромагнитных волн в сложных волноводных структурах наиболее часто используется метод частичных областей. В диссертации основной метод исследования — вариант метода частичных областей — метод переопределенной граничной задачи, предложенный относительно недавно в работах Н.Б.Плещинского, И.Е.Плещинской, Д.Н.Тумакова, О.А.Раскиной, А.Махера и других авторов. При этом в частичных областях рассматриваются вспомогательные граничные задачи, в которых на границе заданы все те величины, которые участвуют в условиях сопряжения полей. Такие задачи являются заведомо переопределенными. Необходимые и достаточные условия

²Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Математические модели электродинамики. — М.: Высшая школа, 1991.

³Гончаренко А.М., Карпенко В.А. Основы теории оптических волноводов. — М.: Едиториал УРСС, 2004.

их разрешимости задают зависимости между граничными функциями. Эти условия вместе с условиями сопряжения на общих участках границ частичных областей образуют систему функциональных уравнений, интегральных или сумматорных, которая сводится в дальнейшем к регулярным интегральным уравнениям или к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ).

Частные решения задачи на собственные значения в слоистой среде построены методом разделения переменных. При обосновании формул, дающих представления решений уравнения Гельмгольца в координатных неограниченных областях, в работе использована техника интегрального преобразования Фурье в пространстве распределений медленного роста на бесконечности.

Научная новизна

В диссертации существенно расширена область применения метода переопределенной граничной задачи. Получены интегральные и интегрально-сумматорные тождества, связывающие значения решения уравнений или систем уравнений с частными производными и его производной по нормали на границах раздела частичных областей в сложных структурах, в том числе, с криволинейными границами. Метод переопределенной задачи впервые применен при исследовании полуоткрытых волноводных структур, имеющих не только дискретный, но и непрерывный спектр.

Достоверность результатов работы

Все утверждения диссертации получены строгими математическими методами, для контроля рассмотрены простые частные случаи, в которых решения задач построены аналитически или найдены численно с помощью простых алгоритмов. Задачи сопряжения сведены к интегральным уравнениям и (или) к беско-

нечным системам линейных алгебраических уравнений, которые могут быть интерпретированы как операторные уравнения Фредгольма II рода. Проведен ряд вычислительных экспериментов, результаты расчетов хорошо согласуются с результатами, полученными другими авторами (в диссертации приведены только некоторые из них).

Практическое значение

Результаты диссертации имеют в основном теоретический характер. В то же время разработанные методы и алгоритмы решения исследованных в работе граничных задач могут быть использованы на практике при расчете полей в различных волноводных структурах. В частности, результаты, полученные для полоткрытых диэлектрических волноводов, могут быть применены при решении задач интегральной оптики и оптоэлектроники.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на I и II Молодежных научных школах-конференциях "Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах" (Казань, Юдино, 19–22 октября 2000 г. и Казань, 14–16 октября 2002 г.), на научной конференции "Проблемы современной математики", посвященной 125-летию КГПУ (Казань, 22–24 октября 2001 г.), на Молодежной научной школе-конференции "Численные методы решения линейных и нелинейных краевых задач" (Казань, 19–23 ноября 2001 г.), на научной конференции "Актуальные проблемы математического моделирования и информатики" (Казань, 30.01.2002 – 06.02.2002 г.), at the 9th, 10th and 11th International Conferences on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET) (Kiev, Ukraine Sept. 10–13, 2002; Dnepropetrovsk, Ukraine Sept. 14–17, 2004; Kharkov, Ukraine June 26 – Yule 1, 2006), на меж-

дународной научной конференции "Актуальные проблемы математики и механики" (Казань, 26 сентября – 1 октября 2004 г.), на Четвертой молодежной научной школе-конференции "Лобачевские чтения — 2005" (Казань, 16–18 декабря 2005 г.), на студенческих научных конференциях и Итоговых научных конференциях КГУ, на семинарах кафедры прикладной математики и отдела прикладной математической физики НИИММ им. Н.Г.Чеботарева Казанского государственного университета.

Публикации

По теме диссертации опубликовано 14 работ, в том числе одна статья в издании из списка ВАК.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения и четырех глав, общий объем работы — 100 страниц. В списке литературы 71 наименование.

Краткое содержание работы

В первой главе рассмотрены граничные задачи и задачи сопряжения для уравнения Гельмгольца, возникающие при исследовании двумерной задачи дифракции ТЕ-поляризованной электромагнитной волны на перегородке в плоском волноводе. В §1 дана общая постановка задачи дифракции на перегородке в плоском волноводе, в том числе, при наличии металлических экранов. Рассмотрен случай, когда перегородка в волноводе вертикальная. Используются некоторые результаты работ Н.Б.Плещинского и Д.Н.Тумакова: исследование переопределенной задачи Коши-Дирихле для уравнения Гельмгольца в полуполосе и метод сведения задачи дифракции к интегральным уравнениям и БСЛАУ. В §2 рассмотрен случай произвольной криволинейной границы разде-

ла сред. Условия разрешимости уравнения Гельмгольца в полуполосе

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0, \quad k^2 = \omega^2 \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon$$

с избыточными граничными условиями на срезе произвольной формы получены в виде интегрального тождества вида

$$u_0(x) = \int_0^h u_1(t) K_1(t, x) dt, \quad x \in [0, h].$$

Задача сопряжения для уравнения Гельмгольца в полосе (задача дифракции на перегородке) сведена к БСЛАУ относительно коэффициентов разложения потенциальной функции по собственным волнам.

В §3 показано, что задача дифракции на перегородке в плоском волноводе эквивалентна граничной задаче для уравнения Гельмгольца в прямоугольнике с нелокальными граничными условиями на боковых сторонах. Нелокальные условия представляют собой условия разрешимости вспомогательных переопределенных граничных задач в полубесконечных областях с условиями Коши на части границы. Для решения задачи в прямоугольной области применен метод разностных схем. Построен численный алгоритм приближенного решения задачи сопряжения, основанный на методе прогонки.

Во второй главе метод переопределенной граничной задачи распространен на трехмерный случай задач волноводной электродинамики. Исследованы граничные задачи и задачи сопряжения для системы уравнений Максвелла в цилиндрической области произвольного сечения (в волноводе с металлическими стенками). В §4 получено необходимое и достаточное условие разрешимости переопределенной граничной задачи в полубесконечной цилиндрической области.

дической области с двумя условиями на торце — интегрально-сумматорное тождество вида

$$\mathbf{e}(x, y) = \iint_S \mathbf{K}(\xi, \eta, x, y) \mathbf{h}(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

где $\mathbf{K}(\xi, \eta, x, y)$ — функциональная матрица 2×2 , элементы которой найдены аналитически как суммы функциональных рядов.

В §5 диссертации трехмерная задача дифракции на разветвлении волновода произвольного сечения сведена к регулярной бесконечной системе линейных уравнений вида

$$\begin{aligned} \tilde{A}_n^1 \lambda_n i\omega \mu_0 \mu \|\varphi_n\|^2 &= -2\delta_{l,n} A_l^0 \lambda_l i\omega \mu_0 \mu \|\varphi_l\|^2 + \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{A}_m^1 \iint_{S_1} \iint_{S_1} L_m^{aa}(\xi, \eta, x, y) d\xi d\eta \varphi_m^1(x, y) dx dy - \\ - \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{B}_m^1 \iint_{S_1} \iint_{S_1} L_m^{ab}(\xi, \eta, x, y) d\xi d\eta \varphi_m^1(x, y) dx dy, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

В §6 кратко изложены методы решения нескольких трехмерных задач дифракции электромагнитных волн на перегородках в прямоугольных волноводах с металлическими стенками. Получено явное решение задачи о скачке на поперечном сечении для системы уравнений Максвелла в бесконечной цилиндрической области. Показано, как задача дифракции волны на неоднородности сводится к граничной задаче в ограниченной области с нелокальными граничными условиями.

В третьей главе метод вспомогательной переопределенной задачи распространен на задачу о стыке полукрытых диэлектрических волноводов. В §7 дана постановка задачи сопряжения для уравнения Гельмгольца с разрывным коэффициентом в слоистой

полуплоскости, к которой сводится задача дифракции ТЕ-поляризованной электромагнитной волны, набегающей на стык полукрытых диэлектрических волноводов.

В §8 методом разделения переменных найдены все моды полукрытого диэлектрического волновода, относящиеся к дискретному и к непрерывному спектру. Введено скалярное произведение мод и доказано, что моды полукрытого диэлектрического волновода образуют ортогональную систему функций. В §9 в приближении волноводных мод задача сопряжения полукрытых волноводов сведена к конечной системе линейных алгебраических уравнений

$$C_k^+ N_k^+ + \sum_{j=1}^{n^+ + n_1} C_j^+ \sum_{s=1}^{n^- + n_1} \frac{1}{N_s^-} G_{js} H_{ks} = 2C_l^0 H_{kl}, \quad k = 1 \dots n^+ + n_1.$$

В четвертой главе рассмотрены переопределенные граничные задачи для уравнения Гельмгольца, которые, с одной стороны, представляют самостоятельный интерес, а с другой — нужны для обоснования полученной в главе 3 формулы, дающей представление решения уравнения Гельмгольца в полукрытой области.

В §10 методом интегрального преобразования Фурье исследована переопределенная граничная задача для уравнения Гельмгольца в области, представляющей собой первый квадрант плоскости, сдвинутый вверх. Показано, что любое решение уравнения Гельмгольца в четверти плоскости может быть представлено в виде интеграла по сложному контуру на комплексной плоскости вида

$$u(x, z) = \int_{\Gamma} U(\alpha; z) e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Аналогичные утверждения получены в §11 при исследовании переопределенной граничной задачи для уравнения Гельмгольца

в полуполосе. Из доказанных в §10 и §11 утверждений следует, что полученные в §8 интегральные представления решения уравнения Гельмгольца являются общими решениями соответствующих граничных задач в полубесконечных слоистых областях.

В §12 диссертации найдены необходимые и достаточные условия разрешимости переопределенных граничных задач в слоистых четвертях плоскости, образующих полуоткрытую волноводную структуру. С помощью этих условий получены интегральные уравнения различного вида, к которым приводится задача сопряжения открытых диэлектрических волноводов.

Основные результаты диссертации

1. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости переопределенной граничной задачи для уравнения Гельмгольца в полуполосе с криволинейным срезом. Задача дифракции электромагнитной волны на криволинейной перегородке в плоском волноводе сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

2. Доказано, что задача дифракции электромагнитной волны на ограниченной неоднородности в плоском волноводе эквивалентна граничной задаче для уравнения Гельмгольца в прямоугольнике с нелокальными граничными условиями на боковых стенках. Предложен алгоритм численного решения задачи дифракции на перегородке в волноводе, основанный на конечно-разностной аппроксимации граничной задачи в прямоугольнике.

3. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости переопределенной граничной задачи для системы уравнений Максвелла в полуцилиндрической области с криволинейным срезом. Метод переопределенной граничной задачи распространен на

задачу о разветвлении цилиндрического волновода с металлическими стенками и на задачу дифракции электромагнитной волны на криволинейной перегородке в цилиндрическом волноводе.

4. Найдены собственные волны полуоткрытого диэлектрического волновода (дискретного и непрерывного спектра) и доказано, что система таких собственных волн является ортогональной и полной. Предложен приближенный метод решения задачи сопряжения полуоткрытых диэлектрических волноводов.

5. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости и интегральные представления решений переопределенных граничных задач для уравнения Гельмгольца в смещенной четверти плоскости, в полуполосе и в слоистой четверти плоскости. Задача сопряжения полуоткрытых диэлектрических волноводов сведена к эквивалентному интегральному уравнению.

Список публикаций по теме диссертации

1. Плещинский И.Н. Дифракция электромагнитной волны на наклонной металлической пластине в плоском волноводе / И.Н. Плещинский // Тр. Матем. центра им. Н.И.Лобачевского. Т.11. Проблемы совр. математики. Матер. науч. конф., посв. 125-летию КГПУ. Казань: Изд-во "Унипресс". 2001. С.218–221.

2. Плещинский И.Н. Численный метод решения задачи дифракции электромагнитной волны на наклонной металлической пластине в плоском волноводе / И.Н. Плещинский // Тр. Матем. центра им. Н.И.Лобачевского. Т.13. Численные методы решения линейных и нелинейных краевых задач. Матер. Молодежн. науч. шк.-конф. Казань: Изд-во "Унипресс". 2001. С.197–204.

3. Pleshchinskii I.N. Diffraction of the eigen waves on an inclined medium interface in the waveguides with metallic bounds / I.N. Pleshchinskii, N.B. Pleshchinskii // Conf. Proc. 2002 Int. Conf. Mathema-

tical Methods in Electromagnetic Theory MMET*02. Kiev, Ukraine, Sept. 10–13. 2002. Vol.2. P.546–548.

4. Плещинский И.Н. Дифракция электромагнитной волны на наклонной перегородке в волноводе с металлическими стенками / И.Н. Плещинский, Н.Б. Плещинский // Актуал. пробл. мат. моделир. и информатики. Матер. науч. конф. (Казань, 30.01.2002–06.02.2002 г.). Казань: Изд-во Казанск. мат. об-ва. 2002. С.68–71.

5. Плещинский И.Н. О задачах дифракции волн на экранах, расположенных на наклонной границе раздела сред в волноводах с металлическими стенками / И.Н. Плещинский, Н.Б. Плещинский // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т.17. Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах. Казань: Изд-во Казанск. матем. об-ва. 2002. С.175–187.

6. Pleshchinskii I.N. The problems of electromagnetic waves diffraction on the dielectric index step in the waveguides with metallic bounds / I.N. Pleshchinskii, N.B. Pleshchinskii // Conf. Proc. 10th Int. Conf. Mathematical Methods in Electromagnetic Theory MMET*04. Dnepropetrovsk, Ukraine, Sept. 14–17. 2004. P.127–129.

7. Плещинский И.Н. Метод интегральных тождеств в некоординатных задачах дифракции волн в волноводах с металлическими стенками / И.Н. Плещинский // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т.25. Актуальные проблемы математики и механики. Матер. Междунар. науч. конф. (Казань, 26 сент – 1 окт. 2004 г.). Казань: Изд-во Казанск. матем. об-ва. 2004. С.216–217.

8. Плещинский И.Н. Задача дифракции электромагнитных волн на границах раздела сред в волноводах с металлическими стенками / И.Н. Плещинский // Итоговая науч.-образоват. конф. студентов Казанск. гос. ун-та 2004 года: Тезисы докл. / Казанск. гос. ун-т. Казань. 2004. С.67–68.

9. Плещинский И.Н. Задача дифракции электромагнитной волны на криволинейной границе раздела сред в плоском волноводе. Метод интегральных тождеств / И.Н. Плещинский // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 29. Математическое моделирование и математическая физика. Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва. 2004. С.95–106.

10. Плещинский И.Н. О разрешимости граничной задачи для системы Максвелла в полубесконечной цилиндрической области / И.Н. Плещинский // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 31. "Лобачевские чтения — 2005". Материалы Четв. мол. науч. шк.-конф. Казань: Изд-во Казанск. матем. об-ва. 2005. С.123–125.

11. Плещинский И.Н. Переопределенная граничная задача для системы уравнений Максвелла в полубесконечной цилиндрической области и ее приложения / И.Н. Плещинский // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 32. Матем. моделирование и матем. физика. Казань: Изд-во Казанск. матем. об-ва. 2005. С.19–30.

12. Pleshchinskii I.N. The over-determined boundary value problem method for the problems of electromagnetic waves diffraction in the waveguides with metallic bounds / I.N. Pleshchinskii, N.B. Pleshchinskii // Conf. Proc. 11th Int. Conf. Mathematical Methods in Electromagnetic Theory MMET*06. Kharkov, Ukraine, June 26–29. 2006. P.288–290.

13. Плещинский И.Н. Задача сопряжения полукрытых диэлектрических волноводов / И.Н. Плещинский, Н.Б. Плещинский // Препринт ПМФ-06-03. Казань: Казанск. матем. об-во. 2006. 34 с.

14. Плещинский И.Н. Интегральные уравнения задачи сопряжения полукрытых диэлектрических волноводов / И.Н. Плещинский, Н.Б. Плещинский // Изв. вузов. Матем. 2007. №5. С.61–80.

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии Издательского центра
Казанского государственного университета
им. В.И. Ульянова-Ленина
Тираж 100 экз. Заказ 13/18

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37
тел.: 231-53-59, 292-65-60